Schaltnetze und Schaltwerke

Marcel Waldvogel
http://marcel.wanda.ch/Rechnersysteme/

Schalten

- Transistoren, Chips
  - TTL, CMOS. ECL
- Logikgatter
  - Minimale Einheiten
  - Logische Schalter mit geeigneter Wirkungsweise
- Kombination von Gattern
  - Komplexe Komponenten

Schaltnetze und Schaltwerke

- Schaltnetze
  - Schaltungen ohne Speicherverhalten
- Schaltwerke
  - Mit Speicherverhalten

Schaltnetze

- Symbole und Wertetafeln
  - Nicht (logische Negation, boole'sche Inversion)
  - Oder (logisches Oder, boole'sche Addition)
  - Und (logisches Und, boole'sche Multiplikation)
- Schaltungsbeispiel
  "Wenn die Sonne scheint UND es warm ist ODER wenn ich müde bin UND NICHT schlafen kann, dann gehe ich spazieren"

Boole'sche Algebra

- B={0,1}
- (B; $\wedge$, $\vee$, $\neg$) ist eine Algebra
  - Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetze
  - Neutrale Elemente
  - Komplemente
- Beweis?
- Zusätzlich
  - minimales und maximales Element
  - Idempotenzgesetze
  - Regeln von de Morgan

Vollständigkeit

- Zeigen, dass alle sinnvollen Funktionen über {0, 1} mit unseren drei Gattern machbar ist
  - Welche einstelligen Funktionen über {0, 1} gibt es?
  - Welche zweistelligen Funktionen über {0, 1} gibt es?
  - Wieviele dreistellige Funktionen über {0, 1} gibt es?

Anzahl Funktionen

- Einstellig
  - $2^2 = 4$ verschiedene Funktionen
- Zweistellig
  - $2^{2^2} = 16$ Funktionen
- n-stellig
  - 2^{2^n} Funktionen, denn:
    - Es gibt zu jedem Argument einer boole'schen Funktion 2 verschiedene Funktionswerte
    - Eine n-stellige boole'sche Funktion hat 2^m verschiedene Argumente

Schaltfunktionen

- $n, m \geq 1; f : B^n \rightarrow B^m$
  - Addition zweier binärer Zahlen der Länge 16
  - Sortieren von 30 16-stelligen Zahlen
  - Primzahltest für Zahlen der Länge 240
- $f : B^n \rightarrow B$
  "n-stellige boole'sche Schaltfunktion"
  - Zusammenhang zwischen Schaltfunktionen und boole'schen Schaltfunktionen?
  - Schlussfolgerung?

Dualsystem

- z=87 binär?
- Mit n Bits lassen sich die Zahlen von $0 \ldots 2^n-1$ darstellen
- Stelle $i \in \{0, n-1\}$ hat Wertigkeit 2^i (von rechts nummeriert)
- Analog zu Dezimalsystem
  - Stelle $i \in \{0, n-1\}$ hat Wertigkeit 10^i

Vollständigkeit (Forts.)

- Allgemeine Funktionsdarstellung
  - $n \geq 1$, $f : B^n \to B$
  - Sortierte Wertetafel
- Vorüberlegungen:
  - Eine n-stellige Zahl i, deren Ziffernfolge $i_1, \ldots, i_n$ ist (von links nach rechts nummeriert), heisst einschlägiger Index von f, falls $f(i_1, \ldots, i_n) = 1$
  - Beispiel: 3, 5, 7 einschlägige Indizes

Minterme

- Sei i n-stellige Binärzahl. Zu $f : B^n \to B$ heisst die Funktion $m_i : B^n \to B$ definiert durch $m_i(x_1, \ldots, x_n) := x_1^{i1} \wedge \ldots \wedge x_n^{in}$ sei i-ter Minterm von f. Dabei gilt:

$$x_j^{i_j} := \left\{ \begin{array}{ll} x_j & \mathit{falls}\ i_j = 1 \\ \neg x_j & \mathit{falls}\ i_j = 0 \end{array} \right\}$$

  - Beispiel: m_3 und m_4
  - Vereinfachung: Weglassen der Argumente
- Wann hat ein Minterm den Wert 1?
  - Aussage über x_j und i_j?

Disjunktive Normalform

- Jede boole'sche Funktion $f : B^n \to B$ ist eindeutig darstellbar als Disjunktion der Minterme ihrer einschlägigen Indizes
- Beweis?
  - Existenz
  - Eindeutigkeit
- Beispiel

Konjunktive Normalform

- Sei i n-stellige Binärzahl und sei m_i der i-te Minterm von $f : B^n \to B$. Dann heisst die Funktion $M_i : B^n \to B$ definiert durch $M_i(x_1, \ldots, x_n) := \neg\, m_i(x_1, \ldots, x_n)$ der **i-te Maxterm von f.**
  - Jede boole'sche Funktion ist eindeutig darstellbar als UND-Verbindung (Konjunktion) der Maxterme ihrer **nicht einschlägigen Indizes.**
- "Konjunktive Normalform"
- Beispiel

Universalgatter

- Mittels der Gatter UND, ODER und NICHT können alle boole'schen Funktionen synthetisiert werden
- Beispiel
  - Nicht notwendigerweise optimal (Schaltzeit, Gatterzahl); komplexes Problem
- Vereinfachungen, Verallgemeinerungen
  - Negation der Ein-/Ausgänge
  - XOR (exclusive-or, entweder-oder, "ungleich")
  - Mehr als zwei Eingänge
- Gibt es ein Gatter, aus dem sich UND, ODER und NICHT erzeugen lassen?

Rechnen mit Dualzahlen

- Addition zweier Zahlen, dual und dezimal
  - 183 + 197
- Bitweise Operation
  - Eingänge: Bits der
  - Ausgänge: Ergebnis, Übertrag
  - Wahrheitstabelle?
  - Boole'sche Funktionen?
- Resultat: **Halbaddierer**

Volladdierer

- Zwei Halbaddierer (logisch, oder?)
  - Eingänge: A, B, Carry_{in}
  - Ausgänge: Summe, Carry_{out}
- Mehr Bits
- Lange Schaltzeiten
  - Carry-Look-Ahead-Logik
    - Carry Generate
    - Carry Propagate
  - Carry Bypass

Karnaugh

- Vereinfachung von Schaltungen
- Boole'sche Umformungen
- Karnaugh-Diagramme
  - Zwei benachbarte Zellen: ein Bit Differenz
  - Zusammenfassung von Resultategruppen (mit Wrap-Around)

Schaltwerke

- Speicherverhalten
  - Output = f(Input, Zustand)
- Speicherarten
  - Beispiel: Getränkeautomat
    - "Physikalischer Speicher"
  - Kondensator
    - DRAM
  - Magnetspeicher
  - Rückkoppelung
    - Astabiler Multivibrator
    - Bistabiler Multivibrator, (ungetaktetes) Flipflop
      - Zwei NOR in Serie
      - Alternativ: zwei NAND mit invertierten Eingängen
      - SRAM

Synchronität

- Abfrage bei gleichzeitiger Änderung
  - Undefinierter Zustand, "Hazard"
- "Getaktetes Flipflop": Zweites Flipflop
  - Verkleinert nur den "gefährlichen" Zeitraum, Elimination unmöglich
- Typischer Schaltungsbau
  - Getaktete Operationen
  - Resultate einer Operation werden zwischengespeichert, um gleichzeitig zu wirken
- Herausforderung: Asynchrone Schaltung

Anwendungen

- Universelle Regeln zur Kombination von universellen Komponenten
  - Elektronisch
  - Elektromechanisch (Relais)
  - Mechanisch (Zuse, mit Fliesskomma!)
- In ähnlicher Form auch anwendbar auf
  - Optik
  - Biologie
  - Quantenmechanik